



TITLE:

一様・非一様カオス転移の統計的性質(低次元カオスI,カオスとその周辺,研究会報告)

AUTHOR(S):

山田, 知司; 藤坂, 博一

---

CITATION:

山田, 知司 ...[et al]. 一様・非一様カオス転移の統計的性質(低次元カオスI,カオスとその周辺,研究会報告). 物性研究 1986, 46(2): 171-173

ISSUE DATE:

1986-05-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/92024>

RIGHT:

$$q_* = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{D} \quad (14)$$

式(13)の  $\lambda_q$  に対する  $Z(z)$  は(2)より,

$$Z(z) = \exp \left\{ \frac{2z}{\pi} \arctan \left( \frac{z}{q_*} \right) \right\}, \quad (15)$$

であるから,  $Z(z) = 0$  の根  $z_n$  は

i) Riemann 球面の  $N$  点

ii)  $(x, y) = (0, \pm q_*)$ ;  $(z \equiv x + iy)$

にある。極根  $r \rightarrow 1$  では  $q_* \rightarrow 0$  となるから, 実根  $z = 0$  が出現する。この時  $\lambda_q = 1$  or  $-1$  となり, 自発的対称性の破れを伴うカオス転移が発生している。

以上のように  $Z(z) = 0$  の実根の出現または根の Riemann 球面の  $N$  点への集積とカオス転移が関係している。これは Yang-Lee<sup>4)</sup> の相転移論と類似していて興味深い。講演では, 微分系のスケーリング関数<sup>5)</sup> その他についても発表した。

## 文 献

- 1) H. Fujisaka, P.T.P. **71** (1984), 513.
- 2) H. Fujisaka and M. Inoue, P.T.P. **74** (1985), 20.
- 3) H. Fujisaka, M. Inoue and H. Uchimura, P.T.P. **72** (1984) 23.
- 4) C. N. Yang and T. D. Lee, P.R. **87** (1952), 404; T. D. Lee and C. N. Yang, P.R. **87** (1952), 410.
- 5) M. Inoue and H. Fujisaka, P.R. B **32**, (1985), 277.

## 一様・非一様カオス転移の統計的性質

九工大 山 田 知 司  
鹿大理 藤 坂 博 一

力学変数によって張られる位相空間の中に2つの接近した初期点を考え, その間の時間  $t$  における距離を  $\Delta(t)$  とおくと, 大きな  $t$  で

$$\langle \ln \Delta(t) \rangle \sim \lambda' t \quad (1)$$

のように、それは時間と共に急速に増大する。ここで、 $\langle \rangle$ は適当なアンサンブル平均である。ところで、一般にはリヤプノフ数のゆらぎが存在するために、大きな  $t$  で

$$\langle (\ln \Delta(t) - \langle \ln \Delta \rangle)^2 \rangle \sim 2Dt \quad (2)$$

になる。ここでの関心は、このリヤプノフ数のゆらぎが物理量にどのように反映するか、ということである。

ここでは、結合したマップの系を考える。離散的な時間  $t$ 、空間座標  $r$  における力学変数の値を  $x_t(r)$  とおくと、その時間発展は次の方程式に従う：<sup>2)</sup>

$$x_{t+1}(r) = \int g(r-r') f(x_t(r')) dr' \quad (3)$$

ここで、 $f$  はマップ関数である。ところで

$$\int g(r) dr = 1 \quad (4)$$

であるので、空間的に一様な解  $x_{0t}$  は

$$x_{0t+1} = f(x_{0t}) \quad (5)$$

に従って時間発展する。以下の話においてはマップ関数  $f$  としてはロジスティックモデル

$$f(x) = ax(1-x) \quad (6)$$

をとり空間座標  $r$  は 1 次元として、周期的境界条件を課することにする。そして、 $g(r)$  としては次のガウス型をとる：

$$g(r) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha}\right) \quad (7)$$

空間の大きさ  $L$  は一般性を失うことなく  $L = 2\pi$  とおくことができる。

この体系においては、ロジスティックモデル(6)の最大リヤプノフ数を  $\lambda$  として、 $\alpha > \alpha_c$   $= \lambda$  に対しては空間的に一様な解が出現し、この空間的に一様な解は  $\alpha < \alpha_c$  に対しては不安定となって空間的に非一様な状態が現われることが判っている。ここではこの一様・非一様カオスの転移点近傍における力学変数の時間的振舞いを調べる。この転移点近傍においては空間的な非一様性は小さいので波数  $k = 0$  と  $k = \pm 1$  のモードのみをとり、残りのモードは考えなく

てよいので式(3)から、次の還元された形の式を得る：

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{n+1} &= a \left[ \bar{x}_n (1 - \bar{x}_n) - r_n^2 \right] \\ r_{n+1} &= a e^{-\alpha} |1 - 2\bar{x}_n| r_n \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 $\bar{x}_n$ 、 $r_n$ は、 $k=0$ および $k=1$ のモードの振巾に比例する量である。この式において $\alpha$ が $\alpha_c$ より小さなところでは、 $r_n$ の間欠的な時間振舞いを示す。そして、 $r_n$ のパワースペクトラム $S(\omega)$ は $a$ の値によって次のように違った傾向を示す。すなわち、 $a=4$ の場合には $S(\omega)$ はローレンツ型でよく合わせられるが $a \neq 4$ の場合には $\alpha$ が $\alpha_c$ に近いところでは、 $S(\omega)$ はローレンツ型からはずれてきて、むしろ $1/f$ 型に近くなる。このような違いは元のロジスティック系の統計的性質を反映している。すなわち、 $a=4$ の場合にはロジスティック系のカオスにおいてはリャプノフ数のゆらぎがなく、一方、 $a \neq 4$ においては、そのゆらぎが存在するからである。このリャプノフ数のゆらぎは、「多くの時間尺度」を $r_n$ の時間振舞いにもたらし、それが $S(\omega)$ のローレンツ型からのずれに導びくのである。この状況を図1のように横軸に $\alpha - \alpha_c$ 、縦軸に $D$ (リャプノフ数のゆらぎの大きさ)をとって、臨界現象にならって次のように説明することができる。図中、 $P$ と印されたのが多分散性を示す領域であり、 $M$ と印されたのが単分散、すなわち $S(\omega)$ がローレンツ型でよく表わされる領域である。ある $a$ の値に対して、 $\alpha$ を変えてパワースペクトラム $S(\omega)$ の変化を見ることにする。これは図1において、 $D$ の値を固定し $\alpha$ の値を変えていくことに対応する。 $\alpha$ を小さいところから増加させると、まずパラメーターは $M$ の領域にあって、 $S(\omega)$ はローレンツ型でよく表わされる。そして、 $\alpha$ をさらに増加させていくと、パラメーターは $P$ の領域に入るので $S(\omega)$ はローレンツ型からはずれていくことになる。この多分散性を示す領域においては $S(\omega)$ の形に次のようなクロスオーバー効果が現れる。すなわち、 $\omega \gg D$ であるか $\omega \ll D$ であるかにより、 $S(\omega) \propto \omega^{-2}$ 型か、 $\propto \omega^{-1}$ 型か、になっている。

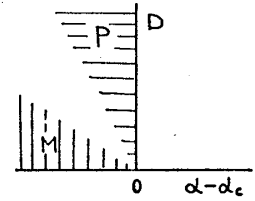


図 1

- 1) P. Grassberger and I. Procaccia: Physica **13D** (1984), 34.
- 2) H. Fujisaka and T. Yamada: to be published.